Onderstaande tekst is een toevoeging op de handout van de presentatie *Toen irrationale getallen nog geen getallen waren ...*, gegeven op 2 februari 2008 op de Nationale Wiskunde Dagen door Jan Hogendijk en Wiggert Loonstra.

11 Extra: wortelbenadering nader bekeken

Zoals we zagen zijn wortels van gehele getallen te benaderen met kettingbreuken. In *Wiskundige lessen, tweede cursus* (1828) van Jacob de Gelder vinden we een meer algebraïsche manier om dat te doen. Hij baseert zich op het werk van Lagrange. We vinden onder meer de manier om de p_i's te berekenen.

11.1 Kwadratische vergelijking

We beginnen met de vergelijking

$$a_1 x^2 - 2bx - a = 0 \tag{1}$$

die op de ons bekendere vorm van een kwadratische vergelijking lijkt met $\bar{a} = a_1$, $\bar{b} = -2b$ en $\bar{c} = -a$. Als we hier de $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$-formule op toepassen, vinden we als positieve oplossing

$$x = \frac{b + \sqrt{b^2 + aa_1}}{a_1}.$$

Omdat we de oplossing willen benaderen met kettingbreuken, schrijven we $x = p_1 + \frac{1}{x_1}$. We geven het grootst mogelijk gehele getal kleiner dan x de naam p_1 en tellen vervolgens dat wat we nu te weinig hebben er bij op met $\frac{1}{x_1}$. Vervolgens gaan we op zoek naar x_1, die van de vorm $x_1 = p_2 + \frac{1}{x_2}$ zal zijn. Als we dit proces voortzetten zal ons antwoord benaderd worden met de uitdrukking:

$$x = p_1 + \cfrac{1}{p_2 + \frac{1}{p_3 + \dots}}$$

We gaan op zoek naar de p_i's.

11.2 Iteratief

Eerst gebruiken we onze benadering voor x in (1). Dit geeft

$$a_1 \left(p_1 + \frac{1}{x_1} \right)^2 - 2b \left(p_1 + \frac{1}{x_1} \right) - a = 0$$

dat na enig algebraïsch rekenwerk eruit ziet als

$$(a - a_1 p_1^2 + 2bp_1)x_1^2 - 2(a_1 p_1 - b)x_1 - a_1 = 0.$$

Stellen we nu $a_2 := a - a_1 p_1^2 + 2bp_1$ en $b_1 := a_1 p_1 - b$, dan levert dat de nieuwe formule

$$a_2 x_1^2 - 2b_1 x_1 - a = 0 \tag{2}$$

die qua vorm heel mooi overeenkomt met (1). Zo kunnen we steeds een stap verder gaan en er een iteratief proces van maken.

Er zal dan blijken

$$\begin{aligned} a_2 &= a + 2bp_1 - a_1 p_1^2 \\ a_3 &= a_1 + 2b_1 p_2 - a_2 p_2^2 \\ &\text{etc.} \end{aligned} \tag{3}$$

en bovendien

$$\begin{aligned} b_1 &= a_1 p_1 - b \\ b_2 &= a_2 p_2 - b_1 \\ &\text{etc.} \end{aligned} \tag{4}$$

Met behulp van (3) vinden we, na vermenigvuldigen met a_1

$$a_1 a_2 - a_1 a = 2bp_1 a_1 - a_1^2 p_1^2.$$

Met behulp van (4) vinden we (kwadrateren):

$$b_1^2 - b^2 = a_1^2 p_1^2 - 2bp_1 a_1$$

en dus geldt:

$$b^2 + aa_1 = b_1^2 + a_1 a_2$$

maar dit zijn juist de discriminanten voor (1) en (2)! Met inductie kan bewezen worden dat de overige discriminanten die we in het iteratieve proces tegenkomen ook gelijk zijn aan deze twee. Laten we daarom zeggen dat de discriminant steeds gelijk is aan N.

Er kan bewezen worden dat alle coëfficienten $a, a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots$ hetzelfde teken hebben. Dit laten wij als bonusopgave over aan de lezer.

We weten nu dat geldt: $a_i a_{i+1} > 0$, dus als $b_i^2 + a_i a_{i+1} = N$, dan $b_i^2 < N$ dus $b_i < \sqrt{N}$. Bovendien $a_i a_{i+1} < N$ en dus $-N < a_i < N$ en $-N < a_{i+1} < N$. Dit betekent dat er een eindig aantal mogelijkheden is voor de (gehele) coëfficienten b_i, a_i en a_{i+1}, dus dat er in de oneindig lange berekening voor de p_i's een terugkerend patroon op zal moeten treden.

11.3 Drie formules

Hoe vinden we p_i met behulp van a_i en b_i? We weten $b_1 = a_1 p_1 - b$ dus in het algemene geval geldt:

$$b_n = a_n p_n - b_{n-1}$$

Omdat $b_1^2 + a_1 a_2 = N$ geldt tevens in het algemene geval:

$$a_{n+1} = \frac{N - b_n^2}{a_n}.$$

Deze formules volgen uit de berekening en kunnen met inductie bewezen worden.

Met behulp van de *abc*-formule weten we dat voor de positieve oplossing voor onze kwadratische vergelijking geldt

$$x_n = \frac{b_n + \sqrt{N}}{a_{n+1}}$$

en met deze drie formules is p_{n+1} te berekenen.
Hetzelfde verhaal is op te stellen voor de negatieve wortel.

11.4 Nogmaals wortel twee

We willen nu een kettingbreuk op gaan stellen die gelijk is aan $\sqrt{2}$. We gaan dan uit van de vergelijking

$$x^2 - 2 = 0. \tag{5}$$

Met bovenstaande theorie kunnen we dan het volgende opschrijven.
Uit (5) blijkt:

$$\begin{aligned} a_1 &= 1, \\ b &= 0, \\ a &= 2, \\ N &= b^2 + aa_1 = 0^2 + 2 \times 1 = 2. \end{aligned}$$

We rekenen uit:

$$x = \frac{b + \sqrt{N}}{a_1} = \frac{0 + \sqrt{2}}{1} \qquad \text{en weten} \qquad 1 < \sqrt{2} < 2,$$

dus $p_1 = 1$. Nu bepalen we de nieuwe constanten, om uiteindelijk de waarde van p_2 te vinden.

$$\begin{aligned} b_1 &= a_1 p_1 - b = 1 \times 1 - 0 = 1, \\ a_2 &= \frac{N - b_1^2}{a_1} = \frac{2 - 1^2}{1} = 1. \end{aligned}$$

Als we deze waarden invullen, vinden we:

$$x_1 = \frac{b_1 + \sqrt{N}}{a_2} = \frac{1 + \sqrt{2}}{1} \qquad \text{en we kunnen vaststellen dat} \qquad 2 < 1 + \sqrt{2} < 3,$$

dus $p_2 = 2$. We berekenen de volgende constanten.

$$\begin{aligned} b_2 &= a_2 p_2 - b_1 = 2 \times 1 - 1 = 1, \\ a_3 &= \frac{N - b_2^2}{a_2} = \frac{2 - 1^2}{1} = 1. \end{aligned}$$

We zien nu dat $b_1 = b_2$ en $a_2 = a_3$. Zonder te rekenen stellen we daarom vast dat p_3 gelijk moet zijn aan $p_2 = 2$.

Als we de nog volgende constanten (b_n, a_{n+1}) uit willen rekenen om p_n te vinden, gebruiken we daar (b_{n-1}, a_n) voor. We zagen dat dit voor het geval $n = 2$ met $(b_1, a_2) = (1, 1)$ (opnieuw) levert $(b_2, a_3) = (1, 1)$. Zo verder gaand, zullen $p_2, p_3, \ldots = 2$. Zo vinden we de gevraagde kettingbreuk

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \ldots}}}.$$

Merk op dat dit resultaat overeenkomt met dat uit hoofdstuk 6.
