# Toen irrationale getallen nog geen getallen waren . . .

Workshop door Jan Hogendijk en Wiggert Loonstra.

Noordwijkerhout, Nationale Wiskundedagen, 2 februari 2008.

0. **Samenvatting**. Het moderne wiskundige begrip van reële getallen is pas in de tweede helft van de negentiende eeuw ontstaan. Daarvoor was een getal in principe een geheel getal ("aantal") of een breuk. In de Griekse oudheid was al ontdekt, dat veel verhoudingen in de meetkunde (bijvoorbeeld tussen zijde en diagonaal) niet met zulke getallen kunnen worden uitgedrukt. Er werd toen ook een diepgravende theorie ontwikkeld om met irrationale verhoudingen om te gaan. Desondanks rekende men in de eeuwen daarna met wortels, sinussen, logaritmen, enz. alsof het wel echte getallen waren.

In deze workshop gaan we ons verdiepen in opvattingen over het irrationale bij Nederlandse wiskundigen in het begin van de negentiende eeuw. Als voorproefje volgt hier wat Jan Hendrik van Swinden (1746-1823) te melden heeft over $\sqrt{2}$: "Wanneer men dan van *onmeetbare getallen* spreekt, duidt men dezelve door een teeken aan, en spreekt niet van het geen zij zijn, want zij zijn er niet; maar van het geen zij zouden zijn, indien men ze door getallen uitdrukken kon, hetgeen onmogelijk is."

We zullen op de manier van Van Swinden bewijzen dat de verhouding van zijde en diagonaal van het vierkant irrationaal is, en daarna zullen we deze verhouding met getallen benaderen op de manier van diens concurrent Jacob de Gelder (1765-1843). Daarna gaan we kijken hoe we hun methoden ook in andere gevallen kunnen toepassen, en wat zij verder over het onderwerp zeggen.

Op die manier krijgen we een inzicht van de vroeg-negentiende eeuwse denkbeelden over de theorie van verhoudingen, in de woorden van De Gelder "dit heerlijk meesterstuk, die schepping onzer gedachten", die "de ziel en het leven van de meetkunst uitmaakt".

**1. Jan Hendrik van Swinden**. Jan Hendrik van Swinden (1746-1828) werd in Den Haag geboren in een oorspronkelijk uit Frankrijk afkomstige familie. Hij studeerde in Leiden en werd in 1767 hoogleraar aan de Universiteit te Franeker, en in 1787 te Amsterdam. Hij was een workoholic die vooral bekend werd door zijn pionierswerk de meteorologie. Na de Franse revolutie speelde hij een belangrijke rol bij de ontwikkeling van het metrieke stelsel, waarin de toen gebruikelijke plaatselijke afstandsmaten (Rijnlandse roede, Stichtse roede, voet, duim, lijn, enz.) vervangen werden door een decimaal standaardsysteem met als basis de meter. Van Swinden reisde hiervoor regelmatig naar Frankrijk.

Wiskunde was niet zijn belangrijkste werkveld maar hij gaf in Amsterdam wel colleges in meetkunde en publiceerde in 1790 een Nederlandstalig leerboek, *Grondbeginsels der Meetkunde*, dat diverse keren werd herdrukt, en ook in het Duits werd vertaald. Het boek is geschreven voor universiteitsstudenten. Van Swinden behandelt meetkundige axioma's en daarna stellingen met meestal alleen hints voor de bewijzen; zijn studenten moesten zelf de bewijzen vinden. De stof komt overeen met een een groot gedeelte van de *Elementen* van Euclides maar van Swinden heeft materiaal uit latere schrijvers toegevoegd, meestal met uitgebreide bronvermelding.

**2. Jacob de Gelder**. Jacob de Gelder leefde van 1765-1848 en is van grote invloed geweest op het wiskunde-onderwijs in Nederland in de eerste helft van de negentiende eeuw. Als kind van ouders uit de lage middenklasse kreeg hij zelf onderwijs aan een *Franse school*, een verzamelnaam voor lagere school en voortgezet onderwijs, al dan niet toegespitst op een bepaald beroep of vakgebied. Hij werd er ook voorbereid op het lesgeven. Omdat hij er geen Latijn heeft kunnen leren, werd hij niet toegelaten tot een universiteit. Wel was hij zeer geïnteresseerd in wiskunde en door zelfstudie verdiepte hij zich daar in. De Gelder richtte na het verlaten van de Franse school in Rotterdam een eigen schooltje inclusief kostschool op. Bij zijn eerste boek, *Grondbeginselen der Cijfferkunst*, dat in 1793 verscheen, noemde hij zich dan ook *Fransch en Duitsch Kostschoolhouder en Leermeester in de Wis-, Sterre-, Aadrdrijks- en Zeevaartkunde*. In 1795 ging het schooltje failliet.

In datzelfde jaar raakte hij bevriend met Jan Hendrik van Swinden, hoogleraar in Amsterdam. Aan hem heeft De Gelder veel te danken, omdat die hem hielp in het opbouwen van zijn carrière.

**2.1.Onderwijs** Jacob de Gelder was docent en schreef leerboeken. Wat daarbij vooral opvalt is dat hij zoveel nadruk legt op het écht snappen van de stof, een inzicht dat hij dankt aan zijn ruime onderwijservaring. Hij neemt er geen genoegen mee dat leerlingen een 'maniertje' gebruiken om tot een antwoord te komen; ze moeten weten waar ze mee bezig zijn. Dit principe is op dat moment uniek in Nederland. In de tweede druk (1817) van De Gelders *Beginselen der Meetkunst* is de tekst aangevuld met een brief van de schrijver aan een van zijn vrienden. Hij schrijft daar:

> *(...) En vooral zult Gij, zoo doende, de gevaarlijke klip vermijden, op welke zoo vele schipbreuk geleden hebben, dat namelijk uw Leerling aan den klank der woorden blijft hangen, en al zijn werk geheugenwerk wordt, en hij ten laatster, met den schijn van kundigheden te bezitten, eigenlijk gezegd niets grondig verstaan zal.*

In zijn carrière is De Gelder ook kortstondig wiskundedocent van de Militaire Academie in Delft en van de Latijnse school in Leiden geweest. Zijn streven naar het door de studenten 'grondig verstaan' van de stof gaf soms wrevel met collega's.

De Gelder heeft bij verschillende van zijn publicaties uitgeschreven lessen toegevoegd, waar hij met behulp van een dialoog beschrijft hoe de ideale les er volgens hem uit ziet. Zie het eind van deze handout.

**2.2. Meetkunde** In het voorwoord van *Beginselen der Meetkunst* (1810) prijst De Gelder zijn eigen resultaten die hij in het boek presenteert, en haalt hij bovendien uit naar zijn voorgangers. Hij schrijft:

> *De gewigtigste theorieën, welke in de beginselen der Meetkunst moeten voorkomen, zijn door ons, op eene geheel nieuwe wijze, behandeld en in een duidelijker en klaarder licht gesteld.*

En:

> *Wij moeten dan nogmaals eenige ogenblikken bij dit stuk blijven stilstaan, en de gronden ontvouwen waarom onze wijze van behandeling der Evenredigheden beter dan de gewone en beter dan die van Euclides is?*

**2.3. Het wiskunde-onderwijs in De Gelders tijd** In 1826 werd in Nederland een wet van kracht waarin voor het eerst eisen omschreven werden waaraan het wiskunde-onderwijs op de toenmalige middelbare scholen moest voldoen. Op de al genoemde Franse scholen werd vòòr die tijd bij de vakopleidingen ook al relevante wiskunde gegeven (koopmansrekenen, landmeetkunde en/of zeevaartkunde). De Latijnse scholen, waar het primair ging om het leren van Latijn en Grieks, deden echter niets aan rekenen of wiskunde. In 1815 werd van de scholen verwacht dat ze *de beginselen der wiskunde* zouden onderwijzen, een eis die in de praktijk nogal breed interpreteerbaar bleek. De wet in 1826 vertelde echter:

> *Art. 1: Het onderwijs der wiskunde op de athenea, collegiën en Latijnsche scholen, zal tenminste moeten bevatten de gronden der rekenkunde, de beginselen der stelkunst* [algebra, WL]*, tot en met de vergelijkingen der tweede magt, en die der meetkunst tot aan de platte driehoeksmeting.*

Op de Latijnse scholen was men niet zo enthousiast om wiskunde aan het lesprogramma toe te voegen, dit ging dan ook niet zonder discussie. In 1829 verklaarde Ph. W. van Heusde, curator van de Latijnse school in Utrecht:

> *Mathesis ontwikkelt den knaap zeer onvolkomen.*

**2.4. De Gelders invloed.** Binnen deze context gaf het Ministerie van Binnenlandse Zaken een advies mee, tegelijk met het opstellen van de eisen voor het vak wiskunde. Zij raadde namelijk De Gelders lesboeken aan, omdat zij het beste gebruikt konden worden om deze vakken uit te onderwijzen. Hieruit blijkt zijn enorme invloed op het wiskunde-onderwijs in Nederland.

**3. Kort overzicht van de geschiedenis van het irrationale**. Voor de Pythagoreeërs (6e-5e eeuw v. Chr) was de essentie van alles getal, dat wil zeggen, aantal. Al in de vijfde eeuw voor Christus werd ontdekt dat sommige verhoudingen in de meetkunde niet door aantallen konden worden uitgedrukt; een voorbeeld was de verhouding van diagonaal en zijde van een vierkant. Eudoxus (350 v. Chr.) ontwikkelde een theoretisch fundament voor het omgaan met zulke irrationale verhoudingen. Deze theorie is bewaard in Boek 5 van de *Elementen* van Euclides en was daarom vanaf de middeleeuwen bekend in Europa.

Het basisbegrip van Euclides en Eudoxus is niet getal maar grootheid. Voorbeelden van grootheden zijn lijnstukken, rechthoeken, lichamen. Grootheden kunnen aan zichzelf worden toegevoegd, en als we dit herhaaldelijk doen kunnen we veelvouden van een grootheid vormen. Als $A$ een veelvoud is van $C$ dan geldt in moderne termen $A = nC$.

Twee grootheden A en B hebben een verhouding als er een veelvoud van A bestaat dat groter is dan B en een veelvoud van B dat groter is dan A. (Modern: als er natuurlijke getallen $m$ en $n$ zijn met $mA > B$ en $nB > A$)

Het moeilijke punt in de theorie is de precieze definitie van $A : B = C : D$, want deze definitie moet niet alleen voor rationale maar ook voor irrationale verhoudingen werken. We zullen de lezer een letterlijke vertaling van de definitie in de Elementen van Euclides besparen. In moderne termen komt die op het volgende neer:

$A : B = C : D$ geldt wanneer voor alle natuurlijke getallen $m, n$ geldt:

$mA > nB \Longleftrightarrow mC > nD$;
$mA = nB \Longleftrightarrow mC = nD$;
$mA < nB \Longleftrightarrow mC < nD$.

Het wordt nu mogelijk allerlei stellingen precies te bewijzen, bijvoorbeeld: als $A : B = C : D$ en $A$ en $C$ hebben ook een verhouding, dan geldt ook $A : C = B : D$. Wij zouden geneigd zijn te zeggen: $A : B = C : D$ dus $A \cdot D = B \cdot C$ dus $A : C = B : D$ maar zo'n bewijs was voor de Grieken niet mogelijk omdat twee grootheden in het algemeen niet met elkaar konden worden vermenigvuldigd. (Wat zou het product van twee lichamen moeten zijn?)

Verhoudingen kunnen onderverdeeld worden in rationale en irrationale. Een rationale verhouding is gelijk aan een verhouding van twee aantallen, dus $A : B = p : q$ voor natuurlijke getallen $p$ en $q$. Hieruit volgt het bestaan van een *gemene maat* $C$, zodat we kunnen schrijven $A = pC$ en $B = qC$. Omgekeerd geldt ook: als twee grootheden $A$ en $B$ een gemene maat $C$ hebben, dat wil zeggen dat $A = pC$ en $B = qC$ voor aantallen $p$ en $q$, dan is $A : B$ rationaal. Als er geen gemene maat is, dan is $A : B$ niet rationaal.

In Boek 10 van de Elementen presenteert Euclides een ingewikkelde theorie om sommige soorten irrationale verhoudingen te klassificeren. In zijn tijd werd in de praktijk niet gerekend met irrationale verhoudingen. Dat veranderde in de late oudheid met de intrede van sterrenkundige voorspellingen in de Griekse cultuur. Er moest nu veel gerekend worden met verhoudingen van lijnsegmenten die wij uitdrukken met behulp van sinus en cosinus. Zulke verhoudingen zijn bijna altijd irrationaal (denk maar aan $\sin(90^o) : \sin(45^o) = 1 : \frac{1}{2}\sqrt{2}$). Men benaderde deze verhoudingen met getallen en rekende daarmee alsof er verder niets aan de hand was. Het verschil tussen rationale en irrationale verhoudingen vervaagde, en in de praktijk ontstond er een naïef (ongefundeerd) begrip van positief reëel getal. In de 17e eeuw werden logaritmes ontdekt, en hierdoor ontstond een nieuwe klasse van wat modern irrationale getallen genoemd zou worden.

Er waren echter nog steeds wiskundigen, zoals Jan Hendrik van Swinden en Jacob de Gelder, die vonden dat irrationale verhoudingen niet door een getal konden worden weergegeven. Volgens hen is $\sqrt{2}$ dus geen getal. Dat zij dit vonden is achteraf gezien niet verwonderlijk: het moderne begrip van reëel getal is pas in de tweede helft van de negentiende eeuw ontwikkeld.

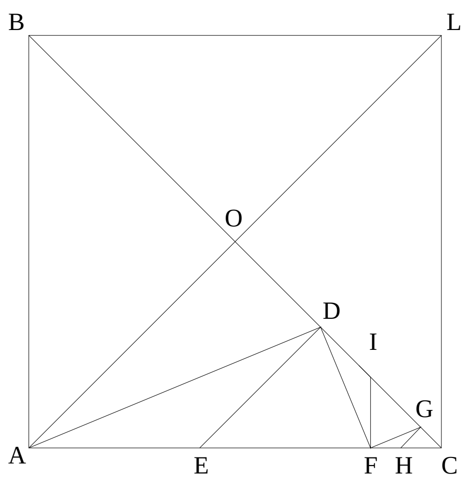
**4. Van Swinden's bewijs van de irrationaliteit van de verhouding van zijde en diagonaal van een vierkant.** Van Swinden gebruikt in de tweede druk (1816) van zijn boek *Grondbeginsels der Meetkunde* een meetkundige constructie om te bewijzen dat de verhouding van zijde en diagonaal in een vierkant irrationaal is. (Hij zegt: irrationeel.) Zijn bewijs is een toepassing van een algoritme van Euclides voor een verhouding $A : B$. Van het grootste lijnstuk (bijv. $A$) haal je zo vaak als mogelijk het kleinste lijnstuk $B$ af. Het kleinste lijnstuk verminder je in stap twee zo vaak mogelijk met het restant van stap één en zo verder. Als er op een bepaald moment geen rest meer overblijft, is de verhouding $A : B$ rationaal en heb je de grootste gemene maat $C$ gevonden. Zo niet, dan is de verhouding tussen de twee lijnstukken irrationaal en dus niet in gehele getallen uit te drukken.

De methode van Euclides illustreren we hier aan de hand van een getallenvoorbeeld. Nu we niet met lijnstukken, maar met getallen werken, spreken we van de grootste gemene *deler* in plaats van de grootste gemene maat. Stel dat we de grootste gemene deler willen bepalen van 42 en 15. We vinden

$$\begin{aligned} 42 - \mathbf{2}(15) &= 12, \\ 15 - \mathbf{1}(12) &= 3, \\ 12 - \mathbf{4}(3) &= 0, \end{aligned}$$

De grootste gemene deler van 42 en 15 is 3.

De vetgedrukte getallen 2, 1 en 4 heten bij Jacob de Gelder de *wijzergetallen*.




Van Swinden past het algoritme van Euclides toe op de diagonaal $BC$ en de zijde $AC = AB$ in het vierkant in bijgevoegde afbeelding. We zien direct dat

$BC < AB + AC$ (driehoeksongelijkheid). Omdat $AB = AC$ kunnen we dus ook stellen $BC < 2AC$. Voeg het punt $D$ toe op $BC$ zodat $AB = BD$. Dan gaat onze ongelijkheid uiteindelijk over in $CD < AC$. We hebben nu het kleinste lijnstuk (zijde $AB$) zo vaak mogelijk (namelijk één keer) van het grootste lijnstuk (diagonaal $BC$) afgehaald. Het restant $CD$ is kleiner dan $AC$ en de eerste stap is daarmee voltooid.

Nu willen we $CD$ zo vaak mogelijk aftrekken van $AC$. Trek hiervoor de lijn door $D$ loodrecht op $BC$ en geef het snijpunt met $AC$ de naam $E$. We weten dat $\angle L$ recht is. Bovendien is $BL = CL$ en dus $\triangle BCL$ is gelijkbenig. En dus zijn de hoeken $LBC$ en $BCL$ beide gelijk aan een halve rechte hoek. We zien dat ook $\angle ECD$ gelijk is aan een halve rechte hoek. Binnen driehoek $CDE$ kunnen we dan concluderen dat $\angle D$ recht is (eis) en $\angle C$ gelijk aan een halve rechte hoek, met als gevolg dat ook $\angle E$ een halve rechte hoek is. Dus is driehoek $CDE$ ook gelijkbenig en $CD = DE$. Bovendien weten we dat $EC < ED + CD$.

We zien dat $\triangle ABD$ gelijkbenig is en dus $\angle BAD = \angle ADB$. Tevens is $\angle BAE = \angle BDE =$ een rechte hoek. Daarmee zien we in dat ook $\angle ADE = \angle DAE$. Dus $\triangle ADE$ is gelijkbenig en $DE = AE$. Teken nu $F$ op $CE$ zodat $AE = EF$. We vullen in:

$$AC = AE + EF + CF$$

en dus

$$AC - AE - EF = AC - 2CD = CF.$$

We hebben $CD$ twee maal van $AC$ afgetrokken. Blijft als rest over $CF$.

Bovendien:

$$EC < CD + DE = 2EF$$

dus

$$EC - EF < 2EF \quad \text{en dus} \quad CF < EF = CD.$$

Wat we overhouden ($CF$) is dus kleiner dan $CD$.

De volgende stap wordt om zo vaak mogelijk $CF$ van $CD$ af te halen. Trek hiervoor de lijn door $F$ loodrecht op $AC$ en noem $I$ het snijpunt met $BC$. Op dezelfde manier als hiervoor zien we dat $\angle CIF$ gelijk is aan een halve rechte hoek en dat $\triangle CIF$ dus gelijkbenig is. Omdat ook $\triangle DIF$ gelijkbenig is, geldt: $FC = FI = DI$. Neem $G$ op $CI$ zodat $DI = GI$. Met een zelfde redenering als voorheen weten we dat $CD - 2CF = GC$ en $GC < CF$.

De vierde stap wordt dan: haal zo vaak mogelijk $GC$ van $CF$ af. Maar we zien dat $\triangle ABC \sim \triangle CIF$. De situatie herhaalt zich. Bij iedere volgende stap houden we

weer een gelijkbenige driehoek over, waarvan het overgebleven deel uit de vorige stap een van de opstaande zijden van de driehoek is. Zo blijft er dus altijd een 'rest' over en zal dit proces nooit stoppen.
Dit geeft aan dat er geen grootste gemene maat bestaat voor de zijde en de diagonaal van een vierkant. De verhouding tussen zijde en diagonaal is dus irrationaal.

**5. Opgaven** Hierna kunnen de opgaven nos' 1, 2 en 3 worden gemaakt.

**6. Numerieke benaderingen van sommige irrationale verhoudingen.** Na zijn bewijs geeft Van Swinden een manier om de verhouding $BC : AC$ in het vierkant te benaderen met een kettingbreuk.

**6.1 Afleiding van deze kettingbreuk.** We hadden gevonden:

$$\begin{aligned} BC - \mathbf{1}(AC) &= CD, \\ AC - \mathbf{2}(CD) &= CF, \\ CD - \mathbf{2}(CF) &= CG, \\ \text{etc.} \end{aligned}$$

We kunnen nu de verhouding $BC/AC$ als volgt beschrijven.

$$\frac{BC}{AC} = \frac{BD + CD}{AC} = 1 + \frac{CD}{AC} = 1 + \frac{1}{\frac{AC}{CD}}.$$

We weten van $AC/CD$:

$$\frac{AC}{CD} = \frac{2CD + CF}{CD} = 2 + \frac{CF}{CD},$$

dus

$$\frac{BC}{AC} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{CF}{CD}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{CD}{CF}}}.$$

Voor $CD/CF$ hebben we gevonden:

$$\frac{CD}{CF} = \frac{2CF + CG}{CF} = 2 + \frac{CG}{CF},$$

oftewel:

$$\frac{BC}{AC} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{CG}{CF}}}$$

en zo kunnen we verder gaan. In moderne termen geldt dat als we $AC = 1$ nemen, dan $BC = \sqrt{2}$. De kettingbreuk die ontstaat, is dus gelijk aan:

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \ldots}}}.$$

**6.2 Benaderen met een schema** Jacob de Gelder heeft een manier gevonden om bovenstaande samen te vatten in een schema. Met behulp van zo'n schema kunnen benaderingen gevonden worden voor een kettingbreuk. Stel de kettingbreuk is van de vorm:

$$p_1 + \frac{1}{p_2 + \frac{1}{p_3 + \frac{1}{p_4 + \ldots}}}.$$

De Gelder noemt de getallen $p_i$ de wijzergetallen.

Het schema heeft dan de volgende vorm:

| | $p_1$ | $p_2$ | $p_3$ | $p_4$ | ... |
|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{1}{0}$ | $\frac{p_1}{1}$ | $\frac{p_2 \times p_1 + 1}{p_2 \times 1 + 0}$ | $\frac{p_3 \times (p_2 p_1 + 1) + p_1}{p_3 \times (p_2) + 1}$ | $\frac{p_4 \times (p_3 (p_2 p_1 + 1) + p_1) + (p_2 p_1 + 1)}{p_4 \times (p_3 p_2 + 1) + (p_2)}$ | ... |
| + | - | + | - | + | ... |

Dit ziet er nogal ingewikkeld uit, maar wat er feitelijk gebeurt is dit. In de middelste rij staan de breuken die we willen berekenen, waarbij de berekeningen voor teller en noemer strikt gescheiden zijn. Als je de teller (of noemer) in kolom $i$ wilt berekenen, vermenigvuldig je het wijzergetal $p_i$ (gegeven, bovenste rij) met de teller (noemer) van kolom $i - 1$ (van de voorgaande al gevonden breuk dus) en tel je daar vervolgens nog de teller (noemer) van kolom $i - 2$ bij op. De + en − geven aan of de gestelde breuk groter dan wel kleiner is dan de waarde van de kettingbreuk.

Opvallend dat De Gelder, die juist zo graag wil dat zijn leerlingen goed snappen waar ze mee bezig zijn, hen ook laat rekenen met dit soort magische tabelletjes. In verschillende boeken behandelt hij ze. We komen ze tegen in *Beginselen der Meetkunst* (pas vanaf de tweede druk!); *Wiskundige lessen, tweede cursus*; *Allereerste gronden der Cijferkunst* en *Beginselen der Stelkunst*. De boeken verwijzen soms onderling naar elkaar, het vaakst naar *Stelkunst*, dat dus de basis voor de schema's zou moeten leggen. In eerste instantie wordt ook hier niet verder gegaan dan een beschrijving van hoe de getalletjes in de juiste vakjes geplaatst moeten worden. Maar vervolgens wordt aan de hand van een ingevuld schema bewezen (met variabelen) dat de breuken beurtelings te groot en te klein zijn en bovendien steeds dichter naar de werkelijke waarde naderen[1]. Het gebruik van De Gelders schema leidt dus inderdaad tot een correct antwoord.

Het gebruik van zo'n schema is uiterst praktisch, zoals we zullen zien voor de berekening van $\sqrt{2}$:

| | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{1}{0}$ | $\frac{1}{1}$ | $\frac{3}{2}$ | $\frac{7}{5}$ | $\frac{17}{12}$ | $\frac{41}{29}$ |
| + | - | + | - | + | - |

Met de moderne rekenmiddelen ter hand vergelijken we de gevonden waarde met die van $\sqrt{2}$.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1} &\approx 1.0000000000000000000 \\
\frac{3}{2} &\approx 1.5000000000000000000 \\
\frac{7}{5} &\approx 1.4000000000000000000 \\
\frac{17}{12} &\approx 1.4166666666666666667 \\
\frac{41}{29} &\approx 1.4137931034482758621 \\
\sqrt{2} &\approx 1.4142135623730950488
\end{aligned}$$

We zien dat na vier stappen onze benadering nog steeds niet erg nauwkeurig is. Nu hebben we met $\sqrt{2}$ te maken met een relatief klein getal en daarom moeten we aardig wat stappen nemen om een grotere nauwkeurigheid te bereiken.

In zijn *Wiskundige Cursus* behandelt De Gelder een slimme 'truc' om bovenstaand resultaat te verbeteren. In plaats van een groot aantal stappen voor $\sqrt{2}$ uit te rekenen, berekenen we een zelfde aantal stappen als zojuist voor $\sqrt{9800}$. Immers: $\sqrt{9800} = \sqrt{4900}\sqrt{2} = 70\sqrt{2}$. Of anders gezegd:

$$\sqrt{2} = \frac{1}{70}\sqrt{9800}.$$

[1]Zie de Gelders *Stelkunst*, p. 384.

De $p_i$'s blijken nu als volgt te zijn:

$$p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 \ldots = 98, 1, 196, 1, 196, \ldots.$$

Een tabel zoals De Gelder die gemaakt zou kunnen hebben, wordt dan:

| | 98 | 1 | 196 | 1 | 196 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{1}{0}$ | $\frac{98}{1}$ | $\frac{99}{1}$ | $\frac{19502}{197}$ | $\frac{19601}{198}$ | $\frac{3861298}{39005}$ |
| + | - | + | - | + | - |

We maken weer gebruik van de moderne rekenapparaten.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{70} \times \frac{98}{1} &\approx 1.4000000000000000000 \\
\frac{1}{70} \times \frac{99}{1} &\approx 1.4142857142857142857 \\
\frac{1}{70} \times \frac{19502}{197} &\approx 1.4142131979695431472 \\
\frac{1}{70} \times \frac{19601}{198} &\approx 1.4142135642135642136 \\
\frac{1}{70} \times \frac{3861298}{39005} &\approx 1.4142135623637995129 \\
\sqrt{2} &\approx 1.4142135623730950488
\end{aligned}$$

Nu hebben we een breuk gevonden die in 10 (!) decimalen nauwkeurig is, terwijl (nog steeds) maar vier stappen gedaan zijn.

De Gelder behandelt in de *Wiskundige Cursus* een algemene methode om voor de wortel uit elk natuurlijk getal dat geen kwadraat is de $p_i$ te vinden en hij bewijst ook dat dit proces op den duur periodiek is. Zie voor een beschrijving van De Gelders bewijs http://www.wiggertloonstra.nl/degelder

**7. Opgave**. Nu kunnen de opgaven 4 en 5 worden gemaakt.

**8. Van Swinden en De Gelder over het werken met irrationale verhoudingen**. Van Swinden stelt duidelijk dat men irrationale verhoudingen ('onmeetbare getallen') wel door een teken kan uitdrukken, bijvoorbeeld $\sqrt{2}$, maar dat dit teken dan niet naar een echt getal verwijst. De verdere opbouw van zijn theorie is niet erg duidelijk.

Volgens hem is $A : B = C : D$ als de aanwijzers van $A : B$ en $C : D$ even groot zijn. Met aanwijzer bedoelt hij: het quotient dat uit de deling van $A$ door $B$ "voortkomt, of begrepen wordt voort te komen." Dit levert natuurlijk problemen als de verhouding irrationaal is omdat er dan geen quotiënt is. Er zijn dan volgend van Swinden twee methoden. In sommige gevallen geven we de verhouding aan door een teken, bijvoorbeeld $\sqrt{2}$, of door twee lijnstukken. Dan geldt $A : B = C : D$ als beide verhoudingen door hetzelfde teken of gelijke lijnstukken worden uitgedrukt. Ook geldt volgens van Swinden $A : B = C : D$ als niet $A : B > C : D$ en ook niet $A : B < C : D$. Dit is volgens hem "eene, naar ons oordeel, uitmuntende trant van bewijzen." [Grondbeginsels der Meetkunde, 2e druk, pp. 99-101]

Jacob de Gelder pakt het iets serieuzer aan. Zijn grondbegrip is *gelijkslachtige grootheden*. $A$ en $B$ heten bij hem gelijkslachtige grootheden wanneer er een veelvoud van $A$ bestaat dat groter is dan $B$ en ook een veelvoud van $B$ dat groter is dan $A$.

Bij een verhouding $A : B$ van gelijkslachtige grootheden is het dan mogelijk een rij wijzergetallen te maken, zoals we boven gezien hebben. (Bijvoorbeeld, als $A$ de diagonaal en $B$ de zijde van een vierkant is, is de rij wijzergetallen de oneindige rij $1, 2, 2, 2, 2, \ldots$. Voor de verhouding 42 : 15 is het de eindige rij 2, 1, 4.)

De Gelder noemt twee verhoudingen $A : B$ en $C : D$ gelijk als de bijbehorende rijen wijzergetallen gelijk zijn.

Hij gebruikt deze definitie om de eigenschappen van verhoudingen te bewijzen, en is hierin redelijk succesvol.[2] De Gelder was erg trots op zijn aanpak, en hij vermeldde dat hij hem nergens bij "uitheemsche schrijvers" gevonden had. Hij wist niet, dat middeleeuws Islamitische wiskundigen (zoals al-Māhānī, ca. 860) hem hierin waren voorgegaan.

**9. De Gelder's onderwijs.** De Gelder vond dat leerlingen zo vroeg mogelijk aan correcte wiskundige begrippen moesten wennen. Daarom werden de leerlingen al vroeg aan de gelijkslachtige grootheden blootgesteld. De Gelders favoriete manier van onderwijs geven was het Socratisch gesprek, waarin de leraar de leerling ondervraagt. Hij beschreef deze methode in detail en met vele voorbeelden in hoofdstuk 5 van zijn in 1826 verschenen boek *Verhandeling over het verband*

[2] De Gelder bewijst $A : B = C : D \Longrightarrow A : C = B : D$ eerst voor rationale verhoudingen. Dan zegt hij dat een irrationale verhouding benaderd kan worden door rationale verhoudingen door de oneindige rij van wijzergetallen af te kappen. Hieruit concludeert hij dat de stelling ook voor irrationale verhoudingen geldt.

*en den zamenhang der natuurlijke en zedelijke wetenschappen, en over de wijze, om zich dezelve eigen te maken en aan anderen mede te deelen.* We eindigen de workshop met het voorlezen van een deel van een voorbeeld-dialoog over gelijkslachtige grootheden op p. 388-392 van het genoemde werk. Pieter, Paulus, Hendrik zijn namen van leerlingen die in deze dialoog optreden. De Gelder zegt:

"II. Voorbeeld. Nemen wij uit de *Allereerste gronden der cijferkunst, II Deel, bladz. 19, art. 510*, de stelling: *"Wanneer twee grootheden A en B tot elkander staan in reden, als een getal p tot een getal q, dan zal de grootheid A, zoo veel maal genomen, als er éénheden in q zijn, gelijk zijn aan de grootheid B, zoo veel genomen als er éénheden in p zijn."*

Na deze stelling, of zelf gelezen te hebben, of te hebben laten lezen, begin ik in dezer voege.

Pieter! *wat wordt in deze leerstelling aangenomen?*

Dat er twee gelijkslachtige grootheden A en B zijn, en | dat deze tot elkander staan in reden, als een geheel getal *p* tot een geheel getal *q*. [389]

*Zeg mij,* Paulus! *wat gelijkslachtige grootheden zijn.*

Het zijn grootheden, die tot één zamenhangend geheel kunnen vereenigd worden, als, bij voorbeeld, lengten en lengten, vlakken en vlakken, ligchamelijke uitgebreidheden en ligchamelijke uitgebreidheden, tijden en tijden, gewigten en gewigten enz.

*Indien dan de grootheid A eene lengte is, zou dan de grootheid B niet een ligchamelijke inhoud kunnen zijn?*

Dan zouden A en B ongelijkslachtig en niet vergelijkbaar zijn.

*Maar,* Hendrik! *wat wil het nu zeggen, dat A tot B in reden staat, als het getal p tot het getal q?*

Het wil zeggen: dat de gelijkslachtige grootheden A en B eene gemeene maat hebben, die *p* maal in A en *q* maal in B begrepen is.

*Wat is eene gemeene maat van twee gelijkslachtige grootheden?*

Eene derde gelijkslachtige grootheid M, die een evenmatig deel van elke dezer twee grootheden A en B in het bijzonder is.

*En wanneer is eene grootheid M een evenmatig deel van eene andere grootheid A?*

Wanneer die grootheid M een geheel getal malen in de grootheid A begrepen is.

*Zoo ik dus zeg, A staat tot B, als 13 tot 8, wat wil dit zeggen?*

Eenvoudiglijk dat A dertien, en B acht van dezelfde maten bevat.

*En wat geven dan die twee getallen 13 en 8 te kennen?* | [390]

De verhouding, de reden (*ratio*), de betrekking of overeenstemming der gelijkslachtige grootheden A en B.

*Geven dan die twee getallen iets bepaalds te kennen?*

Zeer zeker! Want indien ik zeg: A is grooter dan B, dan zeg ik iets geheel onbepaalds; want zoo A honderd deelen, en B acht deelen bevatte, dan zou ook A grooter dan B zijn; en nogtans zou, in dit laatste geval, B in A meer malen begrepen zijn, dan in het eerste; die getallen geven dus eene precieze betekenis aan het woord *grooter*; zij leeren, hoe veel maal A grooter dan B is.

*Dienen die twee getallen ook nog niet tot een ander eindoogmerk?*

Ja! Indien ik A met B (gesteld dat A : B = 13 : 8 is) wilde meten, dan zou ik bevinden, dat A in B één maal begrepen is, met nog een stuk C, en dat één achtste gedeelte van B juist vijf maal in C is begrepen; maar wanneer de verhouding van B in A door de getallen 8 en 13 is voorgesteld, dan behoef ik niet meer die twee grootheden *in natura* te meten; want ik kan dit nu met de getallen zelve doen: het getal 8 is in het getal 13 één maal begrepen, 13 is gelijk 8 en 5; de vijf, die overblijft, is juist vijf maal één achtste deel van acht, welke de maat B voorstelt. Getallen door elkander te deelen is het eene getal door het andere te meten.

*Ik geloof dat gij nu allen den zin en de meening van de voorwaarde, de onderstelling of hypothesis begrijpt; wat was,* Willem! *die onderstelling ook?*

Indien A tot B staat, als het getal *p* tot het getal *q*.

*Die getallen p en q zijn zeker geheelen of gebrokens?*

Neen! Het moeten geheele getallen verbeelden, en wel geheele getallen, die geen gemeenen deeler hebben.

*En dat waarom?* | [391]

Omdat de verhouding van twee gelijkslachtige grootheden altijd in de kleinste getallen, dat is, in getallen, die geen gemeenen deeler hebben, moet worden voorgesteld.

*Dit versta ik niet; verklaar mij dit nader.*

Indien ik zeg, A staat tot B, als 20 tot 15, dan geef ik wel een bepaald denkbeeld van de overeenstemming tusschen A en B, maar niet op de eenvoudigste wijze; want vijf gemeene maten, in welke die grootheden zijn voorgesteld, zijn vier maal in A, en drie maal in B begrepen, en dus kan vijf maal de gemeene maat als eene grootere gemeene maat van A en B beschouwd worden; men kan dus zeggen: A staat tot B, als vier tot drie. Kleiner getallen kan men zich gemakkelijker dan groote voorstellen, en daarom moet men altijd de verhouding in de kleinste getallen aanduiden.

*Dit begrijp ik nu ook volkomen: maar hoe zoudt gij,* Victor! *dit alles nu in wiskundige teekens schrijven?*

Indien A:B = *p : q* is.

*Zeer goed! maar wat wordt nu als een gevolg van die voorwaarde gesteld?*

Dat *q* maal de grootheid A gelijk zal zijn aan *p* maal de grootheid B, dat is *q*A = *p*B.

*Helder dit eens op door een voorbeeld.*

Laat A eene lijn zijn, die 7 duimen lang, en B eene, die 4 duimen lang is, dan staat A tot B, gelijk 7 tot 4; nu is vier maal A vier maal 7, dat is 28 duimen lang, en zeven maal B is zeven maal 4, dat is 28 duimen lang; dus 4A = 7B: en zoo zal men het in alle voorbeelden zien uitkomen.

*Dit zijn slechts proeven, maar nog geen algemeen bewijs. Zeg mij eens, indien A to B staat, als p tot q, wat beteekent dit?* | [392]

Dat de gelijkslachtige grootheden A en B eene gemeene maat M hebben, die *q* maal in A, en *p* maal in B begrepen is.

*Is dan niet A = pM en B = qM?*

Dit is juist zoo.

*Indien gij de vergelijking A = pM met q vermenigvuldigt, wat zult gij dan verkrijgen?*

Dan zal *q*A = *pq*M worden, omdat dezelfde veelvouden van gelijke grootheden gelijk zijn.

*En indien gij de vergelijking B = qM met p vermenigvuldigt, wat verkrijgt gij dan?*

Dan wordt *p*B = *pq*M.

*Indien nu qA = pqM, en pB= pqM is, wat volgt daar uit?*

Dat *q*A = *p*B is: en dit moest bewezen worden.

*Lees nu het betoog in het boek!*

Men late nu het betoog, in goede orde, achter elkander zeggen, en verbetere de fouten, die nog mogten gemaakt worden.

Wanneer men, op die wijze, met zijne leerlingen de *Allereerste gronden der Cijferkunst* leest, kan het niet missen, of de gronden moeten er bij allen goed en vast inkomen. ”

In hetzelfde boek geeft De Gelder soortgelijke dialogen over een heel scala van wiskundige problemen. Deze dialogen zijn alle toegankelijk via internet (die de literatuurlijst).

**10. Literatuur.**

Danny Beckers, *Het despotisme der mathesis*: Opkomst van de propaedeutische functie van de wiskunde in Nederland, 1750-1850. Hilversum: Verloren, 2003 [overzicht en veel verdere literatuur. (Preview op http://books.google.com)

Jacob de Gelder, *Allereerste gronden der cijferkunst*, s'Gravenhage en Amsterdam: Gebroeders van Cleef, 1817-1819, 2 deeltjes. Vele herdrukken.

Jacob de Gelder, *Beginselen der Meetkunst*. Eerste druk: Amsterdam 1810. De tekst van de derde druk, s'Gravenhage en Amsterdam: 1829, is toegankelijk via http://books.google.com

Jacob de Gelder, *Beginselen der Stelkunst*. s'Gravenhage en Amsterdam: Gebroeders van Cleef, 1819. De tekst is toegankelijk via http://books.google.com

Jacob de Gelder, *Verhandeling over het verband en den zamenhang der natuurlijke en zedelijke wetenschappen, en over de wijze, om zich dezelve eigen te maken en aan anderen mede te deelen.* . Amsterdam 1826. De hoofdstukken 1, 2, 4 en 5 van dit boek zijn te vinden op
http://www.math.uu.nl/people/hogend/gelder.html

Jacob de Gelder, *Wiskundige Lessen, tweede cursus*, s'Gravenhage en Amsterdam: Gebroeders van Cleef, 1828.

M. Lemans, Lijkrede op J.H. van Swinden, in *Werken van het Letteroefenend Genootschap: Tot nut en beschaving.*, tweede deel, Amsterdam: Joachim van Embden en zoon, 1825. pp. 71-102 (tekst beschikbaar op http://books.google.com)

Harm Jan Smid, *Een onbekookte nieuwigheid? Invoering, omvang, inhoud en betekenis van het wiskundeonderwijs op de Franse en Latijnse scholen 1815-1863.* Delft 1997. [Met op de voorplaat een tekening van De Gelder die lesgeeft aan een stel leerlingen, waaruit blijkt dat de praktijk niet altijd zo mooi was als in de dialogen in de *Zamenhang* ... wordt gesuggereerd.]

Jan Hendrik van Swinden, *Grondbeginsels der Meetkunde*, 1790. De tweede druk, Amsterdam 1816. is toegankelijk op http://books.google.com Van Swinden's bewijs en zijn kettingbreukbenadering staat op pp. 92-94.

G.J. Verdam, Het leven van den hoogleeraar Jacob de Gelder, *Algemeene Konst- en Letterbode*, Haarlem (1848) vol. 2, pp. 307-445.